GPCC 報告 (2006 年)

Games and Puzzles Competitions on Computers

http://hp.vector.co.jp/authors/VA003988/gpcc/gpcc.htm

藤波順久[*]

1 2006 年の課題

2006 年の GPCC では、以下の 2 個の課題を取り上げた。

シンペイ ボードゲーム「シンペイ」で、序盤戦のうちで敗北する駄目な手を洗い出せ (ゲームを完全に解いても良い)

和にならない分割 $1, 2, 3, \cdots N$ の数字を順番に k 個の集合のどれかに入れていく。そのとき、どの集合のどの 3 つの元 a, b, c をとっても、$a + b = c$ の関係を満たさないようにする。

$k = 2, 3, 4$ に対して条件を満たす最大の N はすでに求まっている。$k = 5$ に対して条件を満たす、なるべく大きい N を見つけよう。

2 2006 年の進展

「シンペイ」(3節) は、田中哲朗さんが解き [1]、平成 18 年度の山下記念研究賞を受賞した。

「和にならない分割」に関しては、池田正喜さんが、$k = 5$ に対して $N = 192$、$k = 6$ に対して $N = 564$(下記に一例を示す) の解を見つけた。しかしながら、$k = 5$ に対して $N = 196$ がすでに知られていることがわかった [3]。chair および co-chair の知る限り、この問題は [2] が初出である。

1. 1 2 4 8 11 22 25 53 66 69 138 151 179 189 195 387 392 405 433 443 514 527 564
2. 3 5–7 19 21 23 50–52 63–65 135–137 148–150 176–178 190–192 389–391 402–404 430–432 444–446 515–517 561–563
3. 9 10 12–18 20 54–62 139–147 180–188 393–401 434–442 518–526 552–560
4. 24 26–49 152–175 406–429 528–551
5. 67 68 70–134 447–513
6. 193 194 196–386 388

他に、問題の候補に挙がったが落選した「ハノイの塔の棒が 4 本の場合」(4節) を西尾泰和さんが、昨年の問題である「裁ちあわせパズルの全解探索」(5節) を五十嵐力さんが、「ペントミノパズルの解の分類」(6節) を柴原一友さんが解いた。

以下の節は、上記の解答者から寄せられた解説を、編集したものである。ただし、池田さんの方法は、スペース等の制約から下記 Web ページに掲載した。

http://hp.vector.co.jp/authors/VA003988/gpcc/06p1a.htm

[*]株式会社ソニー・コンピュータエンタテインメント、GPCC chair

3　シンペイ

3.1　はじめに

2006年のGPCCの問題として選ばれた「シンペイ」[1]は高橋晋平氏が考案し株式会社バンダイが2005年7月に発売したボードゲームである．

ルールは以下のようになっている．

道具 図1左のようなボード1面と，赤と青[2]の駒それぞれ4個を使ってプレイする．駒はボード上の25箇所の穴のそれぞれに1つまで置くことができる．ボード上の交点は4×4の上の世界と3×3の下の世界に分かれている．図1左では大きな丸が上の世界，小さな丸が下の世界を表してる．

進行 プレイヤー2人で遊ぶゲームである．それぞれのプレイヤーは自分の色の駒を4つずつ手に持ってプレイを開始する[3]．最初の8手までは手持ちの駒を盤面上の空マスに置いていく．盤面のどこに置いても良いが，最初の1手は，図1中央の位置に置く必要がある．9手目以降は盤面上の自分の駒を1つ選んで斜めの線に従って，1つだけ動かす．動かす先は空マスである必要がある．元々上の世界にあった駒の場合は下の世界に，下の世界にあった駒は上の世界に移ることになる．図1右のように自分の駒が動かせない場合は，パスして相手の手番に変わる．

挟む 置いた駒，あるいは移動した駒によって挟まれた状態(リバーシと同様に縦横斜めに挟む)の敵の駒は，元の場所から空いてる空欄に移動する．ただし，この際は上の世界と下の世界は独立なものとして扱う．

ゲームの目標 上の世界，あるいは下の世界で，自分の手番で縦横斜めに駒を3つ並べると勝ちになる．ただし，4つ並べるのは勝ちにはならない．また，上の世界と下の世界は駒を並べることに関しては独立なので，上の世界と下の世界の組み合わせで3つ並べても勝ちにはならない．

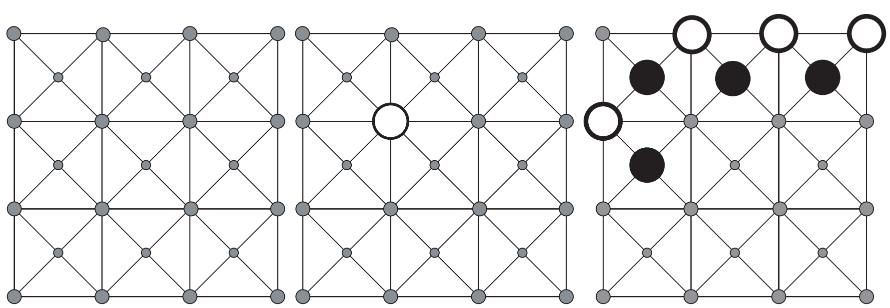

図 1: シンペイのルール

3.2　解法

プログラミングをする前に，ゲームのすべての局面の数を紙の上で見積もったところ，1億局面には達しないことが分かった．これならば大した工夫もなく扱える見込みがたったので，すべ

[1]株式会社バンダイの登録商標．
[2]ここではは代わりに白と黒を用いる．
[3]便宜上，ここでは先手を白とする．

駒数	勝ち	引き分け	負け	計
0	1	0	0	1
1	4	0	2	6
2	83	0	4	87
3	703	5	207	915
4	7580	75	2058	9713
5	53120	533	13363	67016
6	351933	3634	88769	444336
7	1897191	12922	196863	2106976
8	7008560	111377	2353178	9473115

表 1: 駒数ごとの局面の勝ち負け

ての局面をメモリ上に保持した上で，後退解析 (retrograde analysis) によりすべての局面の勝敗を作成することにした．後退解析は以下のようにおこなう．

1. すべての局面 (初期局面から到達不可能なものも含むが，駒の数のバランスは取れている) と局面間の遷移のテーブルを作る．その際，対称な局面は同一と見なす．
2. 勝負のついた局面の集合から開始する．
3. 勝負のついた局面の一手前の局面を求める．
   - (手番のプレイヤーの) 負け局面から一手前の局面は (手番のプレイヤーの) 勝ち局面
   - 勝ち局面から一手前の局面の勝敗が未確定の時は，そこから可能な手がすべて勝ち局面に移行する時は，負け局面とする．
4. 操作を繰り返して，勝ち局面の集合も負け局面の集合がそれ以上増えなくなったら終了する．

Opteron 252(2.6GHz) x 2, メモリ 12GB のマシンで 12 分ほど実行したところ，プログラムが終了した．コマ数ごとの局面の勝ち負けを分類した結果を表 1 に示す．

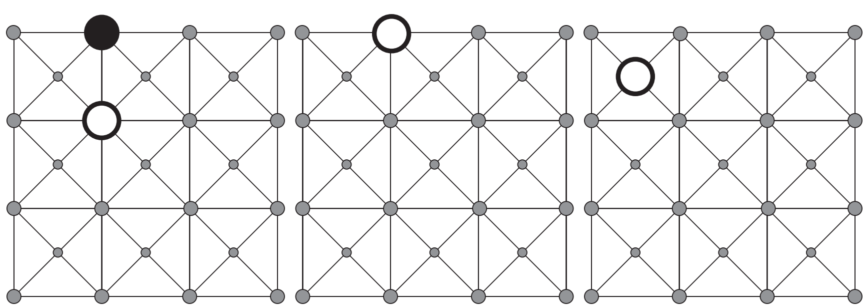

図 2: 勝つ手

特に，シンペイの現在のルールの初期配置である図 1 中央は次の手番，すなわち黒の勝ちであることがわかった．なお，黒が勝つ手は図 2 左の手のみに限られている．この後，黒が最短の勝ちを目指しても 21 手が必要となる．また，黒の勝ちを証明するのに必要な最小証明木のサイズは 11128 ノードと分かった．このことから分かるように　この証明は決して難しくはない．実際，GPCC chair の藤波さんからメモリ 512MB のマシンで同様の結果を得たという報告があった．また，後退解析で全局面に関する情報を求めた結果，以下のような性質を求めることができた．

- 先手が1手目を自由に選択できるようにルールを変更したとすれば，白勝ち (勝つ手は図2中央，および右).
- 分岐数の最大値は2403
- ツークツワンク (ZugZwang) が存在し，局面数は1115
- 強制手 (負けない手が1手のみ) の連続からなるサイクルの周期の最大値は4
- 勝つために要する手数の最大値は49

詳しくは文献[1] にまとめてあるので参考にして欲しい.

4 一般化したハノイの塔にひそむ規則性

従来のハノイの塔には棒が3本あるが、これを「スタートとゴールの他に一時的に板を置くスペースが1つある」と考えることにする。またn枚の板とm個のスペースからなるハノイの塔問題の最小手数を$h(n,m)$と書くことにする。0枚の板を動かす最小手数は0だと考えると$m=1,2,3$のそれぞれに対して$h(n,m)(n \geq 0)$は以下のようになる。

h(n, 1) = 0, 1, 3, 7, 15, 31, 63, 127, 255, 511, 1023, 2047,...
h(n, 2) = 0, 1, 3, 5, 9, 13, 17, 25, 33, 41, 49, 65, 81, 97, ...
h(n, 3) = 0, 1, 3, 5, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 39, 47, 55, ...

ここで階差数列$d(n,m) = h(n+1,m) - h(n,m)$を考える。$d(n,m)$は下のように$2^0$から始まり、直前の数と同じか2倍かのどちらかの値を取る。

d(n, 1) = 1, 2, 4, 8, 16, ...
d(n, 2) = 1, 2, 2, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 16, ...
d(n, 3) = 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 8, 16, ...

$d(n,m)$の数列中に2^iがいくつ現れるか数えた数列$D(m,i)$は以下のようになる。

D(1, i) = 1, 1, 1, 1, 1, ...
D(2, i) = 1, 2, 3, 4, 5, ...
D(3, i) = 1, 3, 6, 10, 15, ...

これは実はパスカルの三角形を45度回転したものである。パスカルの三角形を斜めに読むと三角数や四面体数が現れることが知られているので、スペースがm個のハノイの塔の最小手数の階差数列は、m次元の三角形を用意して0段目には1、1段目には2、k段目には2^kと書き、小さい順に読みあげたものだと考えられる。スペースが0個のハノイの塔で1枚しか移動できないのは、0次元の三角形 (つまり点) になってしまうからだ。

これらの数列を求めるために作成したプログラム (Pythonで50行程度) や、その説明などは西尾泰和のBlog [4] にて公開している。

5 裁ちあわせパズルの全解探索

5.1 裁ちあわせパズルの解探索手法

提示された裁ちあわせパズル問題を解くために、8×8に図形が収まる任意分割数の裁ちあわせパズル全解探索システムを作成した。解探索においては、最初の図形の切分けを全通り作成する探索および、切り分けたピースを次の図形に全通り箱詰する探索に分けられる (図5)。

裁ちあわせパズルの全解を求めるうえで、解の重複を防ぐ必要がある。ここでは、分割の重複、箱詰の重複が出ないようにすることをはじめ、回転して同じ形になる図形へのピース配置 (回転、

[4] http://www.nishiohirokazu.org/blog/2006/11/generalized_hanoi.html

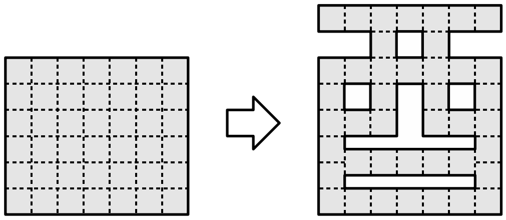

図 3: 西パズル

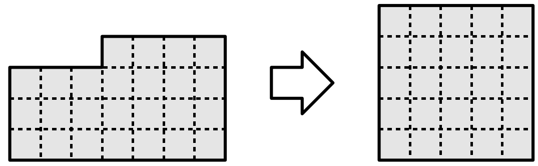

図 4: 類題

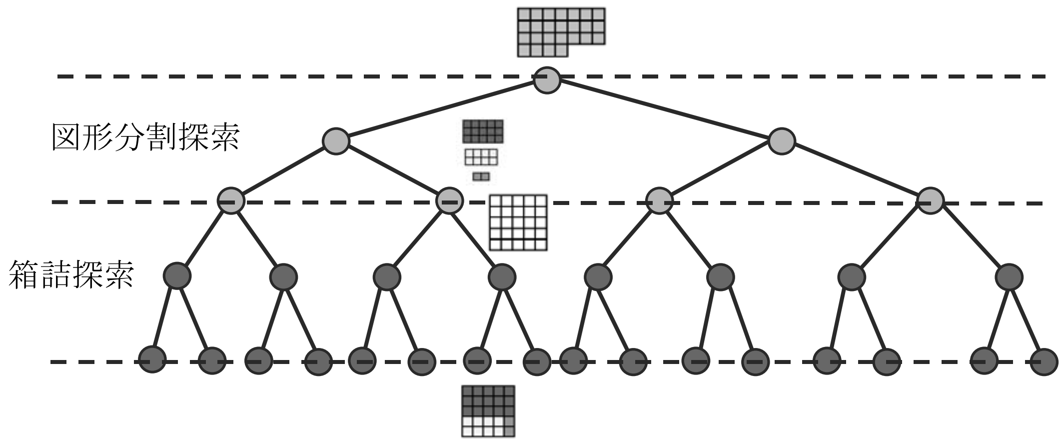

図 5: 裁ちあわせパズル全解探索システムの探索木

位置) を考慮して重複した解を計算しないようにしている。また解探索の高速化として、あらかじめ二つの図形に入りうるピースを列挙しておいたり、大きなピースから切分けや箱詰を行うことで探索量を減らしている。

5.2　裁ちあわせパズル解探索結果

図4の類題においては、全解数92個が2.4秒で求まった。図3の西パズルにおいては、まず部分的にずれている1×5のピースを「西」の字の横に付けた形(図7)として解き、全解97個を3時間55分で得た。この97解のうち、本来離れているべき「西」と「一」が離れているものを抽出し、これが8解あった。さらに、この8解はすべて「西」の字の反転重複を含んでいる(図7)ため、それを除いた4解が最終的な解となる。

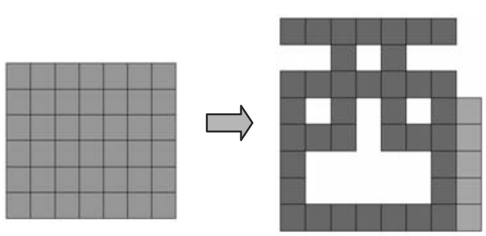

図 6: 西パズルの変形問題

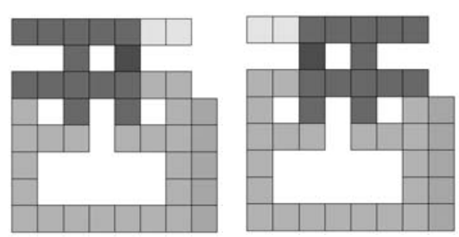

図 7: 重複解

```
void hantei(n){
  for(i=0;i<2339;i++){
    for(j=i+1;j<2339;j++){
      for(解iの正位置，左右反転位置，上下反転位置，180度回転位置に対し){
        if(解iの変形と解jのピース配置の不一致数が閾値n以下)
            iの属するグループとjの属するグループを同じグループに変更
      }
    }
  }
}
```

図 8: ペントミノパズルの解の分類問題の解を求める擬似コード

6 ペントミノパズルの解の分類問題の探索方針と結果

ペントミノパズルの解の分類問題とは，6x10ペントミノ箱詰め問題の解2339個に対し，n片のピースの置き換えによって別の解に変更できるような解の連結な集まりをグループとしたときに，すべてのピースが同一グループに属する最小のnを求める問題である．AとB，BとCが同一グループの場合，AとCも同一グループとなる．

ペントミノがn片異なっている二種類の解が，同一のグループであることを判断するためには，そのn片以外のピースがすべて同一の配置になっていることを調べればよい．たとえば問題図[5]のAとBでは斜線で塗られた2片以外のピースがすべて同一の配置になっている．これにより，AとBは2片の置き換えによって，同一グループであると判明する．

解を求めるプログラムの擬似コードを図8に示す．

ペントミノ箱詰め問題には重複解が存在し，通常の配置(正位置)のほかに，左右を反転した配置と，上下を反転した配置，180回転させた配置の3種類が存在する．これらの配置についても調べなければならない．

引数を2に設定することで，2片の置き換えによるグループ化が行われる．この引数を徐々に増やし，すべての解が同一のグループに置き換わったときのnが解となる．

n片までの置き換えを許す場合のグループの総数の変化を表2に示す．

n	2	3	4	5	6	7	8
グループ総数	1457	1240	822	539	101	9	1

表 2: 置き換え可能数nに対する，グループ総数の変化

参考文献

[1] 田中哲朗: ボードゲーム「シンペイ」の完全解析, 情報処理学会研究報告 2006-GI-15, pp. 65–72(2006).

[2] Problems And Conjectures, *Journal of Recreational Mathematics*, 2(4), 1969.

[3] Solutions To Problems And Conjectures, *Journal of Recreational Mathematics*, 7(2), 1974.

[5] http://hp.vector.co.jp/authors/VA003988/gpcc/gpcc05.htm#p2